Nom, Prénom : ……………………………………………………… **Mardi 24 Janvier 2024**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°5

/40

Exercice 1:

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1 : L'équation $(3\ln x - 5)(e^x + 4) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

Affirmation 2 : La fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-2}{4-x}\right)$ est définie sur $]\,4\,;+\infty\,[$.

Affirmation 3 : La dérivée de la fonction f définie à l'affirmation 2 est $f'(x) = \dfrac{10}{(4-x)(3x-2)}$

Affirmation 4 : L'inéquation $\ln(2x-1) + \ln 2 \geq \ln 8$ n'a pas de solution.

Exercice 2: Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{5x+2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{x^2-7x-5}{x-2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+\sin(x)}{x^2+4}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x-e^x}{e^{2x}-3}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x^2}$

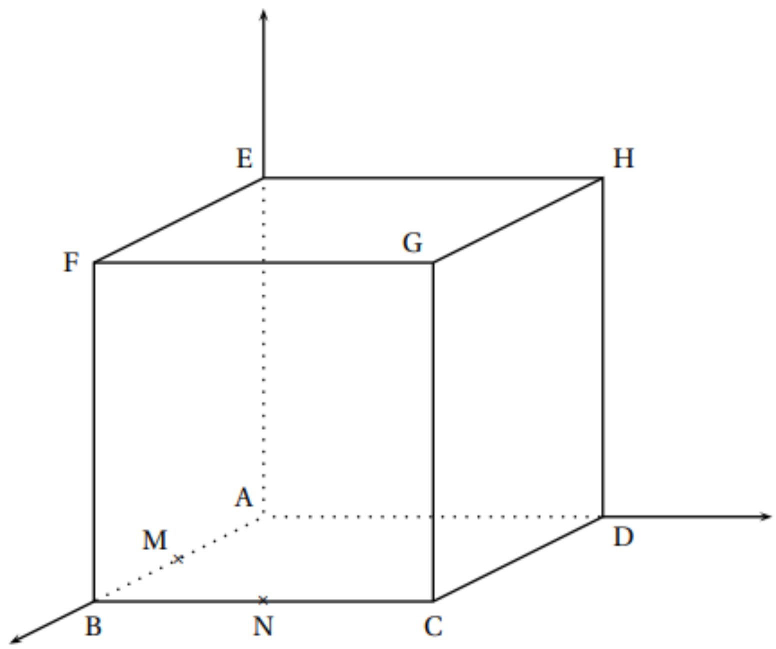
6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Exercice 3 :

On donne la fonction f définie sur $]\,\frac{1}{2}\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4x^2-10x+10}{2x-1}$.
3) Etudier les variations de la fonction f sur $]\,\frac{1}{2}+\infty\,[$ et dresser le tableau de variations.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\,\frac{1}{2}\,;+\infty\,[$.
5) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
6) En déduire le signe de la fonction f sur $]\,\frac{1}{2}\,;+\infty\,[$.
7) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
8) Montrer que $f''(x) = \dfrac{2(4x^2-4x-5)}{(2x-1)^2}$ et étudier la convexité de la fonction f sur $]\,\frac{1}{2}\,;+\infty\,[$.

Exercice 4:
Dans le cube ABCDEFGH, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).

1) Donner sans justification, les coordonnées des points H, M et N.

2) On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.
   a) Donner une représentation paramétrique des droites (MN) et (CD).
   b) Déterminer les coordonnées du point K.

3) On admet que les points H, M et N définissent un plan nommé (HMN) et que la droite (CG) est sécante à ce plan.
   a) Montrer que le point L(1 ; 1 ; $\frac{1}{3}$) appartient à la droite (CG).
   b) Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$
   c) Que peut-on en déduire pour le point L ?

4) Sur le dessin ci-dessus, construire les points K et L puis la section du cube ABCDEFGH par le plan (HMN).